

## РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

© 2025 г. Д. А. Арутюнян<sup>1,\*</sup>, В. В. Жмур<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

<sup>2</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: arutyunyan.da@phystech.su

Поступила в редакцию 18.12.2024 г.

После доработки 14.01.2025 г.

Принята к публикации 26.01.2025 г.

В работе рассмотрена задача о режимах поведения бароклинных геострофических вихрей эллипсоидальной формы ядра в горизонтальных течениях с вертикальным сдвигом. В таких течениях ядро вихря зажато между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, которых вихрь касается своими верхней и нижней точками. Длины всех полуосей эллипса под действием фонового течения могут меняться, также меняются углы ориентации вихря в пространстве. Авторами выделено три варианта поведения вихрей. Первый – режим выживания вихрей в сдвиговом потоке, при котором вихрь неограниченно долго во времени испытывает конечные колебания длин полуосей и может довольно сложно вести себя по углам ориентации. Так ведут себя сильные вихри. Во втором режиме вихрь с самого начала вытягивается вдоль течения, оставаясь в конечных горизонтальных размерах поперек течения, и сплющивается по вертикали. Это режим уничтожения вихря течением, конечным результатом которого является формирование из вихря тонкой вертикальной структуры океана. Такой эволюции подвергаются слабые вихри. Этот режим назван режимом неограниченного вытягивания. Наконец, существует третий вариант поведения вихрей, названный режимом конечного времени жизни, в котором на конечном промежутке времени вихрь живет подобно режиму выживания (его форма ограниченно деформируется, сам вихрь вращается или колеблется в пространстве), а затем вихрь неограниченно вытягивается аналогично режиму уничтожения. Авторы выделили области существования каждого режима на плоскости безразмерных параметров задачи и определили границы, разделяющие вышеуказанные режимы поведения вихрей.

**Ключевые слова:** эллипсодиальный вихрь, ядро вихря, бароклинное течение, вертикальный сдвиг, режим конечного времени жизни вихря, режим вытягивания

DOI: 10.31857/S0030157425040024

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению мезомасштабной изменчивости океана возник после открытия в 1970 году антициклонического вихря в северной части Атлантики в экспедиции “Полигон-70”. Вихрь имел в плане эллиптическую форму с полуосами 90 и 180 км, медленно вращался как целое, одновременно передвигаясь на запад со скоростью 2 см/с с небольшой южной компонентой порядка 1 см/с. Орбитальная скорость частиц имела максимум на глубине 400–600 м. Для условий экспедиции “ПОЛИГОН-70” внутренний радиус деформации Россби  $L_R$  составлял величину порядка  $L_R \sim 65$  км, что позволяло уверенно заявлять, что данный вихрь имеет от-

ношение к мезомасштабным явлениям океана. Впоследствии для изучения вихревой динамики океанов были проведены знаменитые морские эксперименты МОДЕ (Саргасово море, 1973 г.), ПОЛИМОДЕ (Северная Атлантика, 1977–1978 гг.), МЕЗОПОЛИГОН (Северная Атлантика, 1985 г.), МЕГАПОЛИГОН (Тихий океан, 1987 г.) и др. Стало понятно, что вихри вносят заметный вклад в транспортировку соли, тепла и других примесей, активно участвуют в перемешивании вод океанов и в конечном итоге заметно влияют на изменяющийся климат. Это привело к возрастанию спроса на исследования теоретических проблем геофизической гидродинамики, а также к увеличению количества работ

по лабораторному и численному моделированию мезомасштабных процессов океана.

Теоретическое изучение поведения вихрей на течениях интересовало исследователей еще с начала 20-го века. Кирхгоф получил точное решение эволюции равнозавихренной эллиптической области в 2D-гидродинамике идеальной жидкости в покоящейся на бесконечности среде [8, 15]. Поведение вихря Кирхгофа на течении со сдвигом изучал Чаплыгин [12, 10], однако полное представление о режимах эволюции вихря Кирхгофа в равнозавихренных течениях было проведено японским исследователем Кида [14]. Работа Кида послужила толчком в изучении вихрей плоской гидродинамики. В частности, Полвани и Флёрл [20] разработали теорию, обобщающую вихрь Кирхгофа. В 90-х годах прошлого столетия появилась теория объемных эллипсоидальных вихрей в приближении квазигеострофики [5, 21, 19]. В первых работах изучались вихри с одной вертикальной и двумя горизонтальными осями на баротропных равнозавихренных потоках типа потоков Кида. Как оказалось, поведение эллиптических вихрей Кирхгофа и указанных объемных эллипсоидальных вихрей в равнозавихренных баротропных потоках качественно очень похожи друг на друга. И те и другие имеют только три режима поведения вихревых ядер – вращение или колебание формы вокруг вертикальной оси с одновременной ограниченной вариацией длин горизонтальных полуосей и режимом неограниченного вытягивания вихревого ядра в горизонтальной плоскости. В первых двух случаях движение формы периодическое, а в последнем – апериодическое. Режим неограниченного вытягивания трактовался авторами как режим уничтожения вихрей течениями.

Несмотря на сам факт установления трех режимов поведения вихрей в баротропных течениях еще в 90-х годах, количественные критерии, разделяющие различные режимы, были получены только в 2023 году [2, 4]. В работах 90-х годов [6, 19] исследованы поведения эллипсоидальных вихрей с произвольной ориентацией в пространстве и в более сложных равнозавихренных потоках. Эти исследования и обобщения данного направления продолжились в работах школы Дритчела [13, 16–18] и других авторов. Также работы по изучению вихрей конечного объема велись в лабораторных и натурных условиях (см., например, [1, 7]). Уже в первых работах [6, 19] для описания и изменения углов ориентации эллипсоидального вихревого ядра в пространстве применялись три угла Эйлера или

углы Кардана. В результате была получена довольно сложная система из шести обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию этих углов и изменение длин полуосей эллипсоидального вихревого ядра во времени. Однако полного количественного исследования режимов деформационного поведения ядер сделано не было до сих пор из-за сложности системы и ее многомерности. Из качественных свойств решений отмечалось сложное поведение ориентации вихрей в пространстве и появление новых режимов неограниченного вытягивания, при которых вначале на некотором временном интервале вихрь испытывает ограниченные квазипериодические колебания длин полуосей вихревого ядра при сложном поведении углов ориентации, а затем ядро практически останавливается в пространстве и далее неограниченно вытягивается фоновым течением. Такое поведение интерпретировалось авторами как эволюция вихря в течениях с конечным временем жизни. Авторы для очень узких условий предложили интерполяционную зависимость времени жизни от интенсивности вихря и сдвига фонового течения. В работе также не предлагались варианты другого типа поведения вихрей. Сравнивая по упомянутым работам поведение вихрей в баротропных и бароклинических потоках, отметим следующее: аналогов вращательного и колебательного режимов вихрей в баротропных течениях для бароклинических потоков обнаружено не было; для бароклинических течений усложнился режим неограниченного вытягивания вихрей. При этом в упомянутых работах отсутствуют какие-либо количественные критерии. В результате возникает ряд вопросов: 1) какие режимы поведения вихрей существуют в бароклинических потоках; 2) существует ли режим периодического или квазипериодического поведения параметров вихря при его эволюции в бароклинических течениях; 3) если режимов несколько, то какие количественные критерии отделяют режимы друг от друга. В качестве фонового течения будет выступать горизонтальный поток с вертикальным сдвигом. Это пример простейшего равнозавихренного бароклинического течения.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя работам [5, 6, 19], рассмотрим в квазигеострофическом подходе стратифицированный вращающийся океан при малых числах Россби  $Ro = \frac{U}{fL} \ll 1$  ( $U$  – характерная скорость изучаемого

процесса,  $L$  – характерный горизонтальный размер,  $f = \text{const}$  – параметр Кориолиса) в приближение  $f$  – плоскости. Уравнения геофизической гидродинамики в этом случае сводятся к одному уравнению для давления или в эквивалентной постановке к уравнению для функции тока  $\psi(x, y, z, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left( \psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  – неподвижные горизонтальные оси системы координат;  $z$  – вертикальная ось;

$J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$  – определитель Якоби

(якобиан);  $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа по горизонтальным координатам;  $N(z)$  – частота Вайсяля-Брента.

Если функция тока  $\psi(x, y, z, t)$  найдена, то можно вычислить все остальные гидродинамические характеристики движения, например, поле скорости ( $u, v, w$ ):

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f_0}{N^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J_h \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right]. \quad (2)$$

При этом уравнение (1) учитывает только геострофическую часть горизонтального движения, о чем свидетельствуют первые два соотношения (2). Негеострофическая компонента скорости в этой постановке мала – порядка  $O(\text{Ro})$  и из приближения (1) получена быть не может.

Уравнение (1) утверждает, что величина

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3)$$

с той же точностью порядка  $O(\text{Ro})$  является лагранжевым инвариантом и переносится вместе с движущейся жидкостью. Сохраняющаяся величина  $\sigma$  называется потенциальной завихренностью, или потенциальным вихрем. Это название ввел Россби, поэтому выражение (3) иногда будем называть потенциальной завихренностью по Россби. Отметим, что  $\Delta_h \psi = \text{rot}_z \vec{u}$ . Потенциальная завихренность  $\sigma$  формируется относительной завихренностью  $\text{rot}_z \vec{u}$  и сжатием-растяжением жидкости по вертикали (слагаемое  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ). В случае  $N = \text{const}$  соотношение (3)

может быть упрощено. Действительно, если ввести понятие “растянутой” в  $\frac{N}{f}$  вертикальной ко-

ординаты  $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$ , то оператор  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z}$  можно записать в виде  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$  и соотношение (3) можно представить как трехмерный оператор Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$  в “растянутом” по вертикали пространстве  $(x, y, \tilde{z})$ :

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z}^2} = \Delta \psi. \quad (4)$$

Соотношение (4) можно интерпретировать как распределение потенциальной завихренности  $\sigma$  в “растянутом” пространстве. Особенно такой подход продуктивен при кусочно-постоянном распределении. Например, пусть в некотором замкнутом объеме  $V$  пространства  $(x, y, \tilde{z})$  потенциальная завихренность частиц постоянна  $\sigma_{in} = \text{const}$ , а вне этого объема потенциальная завихренность тоже постоянна, но это уже другая константа  $\sigma_{out} = \text{const}$ . Границы области  $V$  подвижны и деформируемы. Деформируемый объем  $V$  назовем вихревым ядром, или ядром вихря. Частицы, попавшие внутрь области  $V$ , перемещаются вместе с этой областью. Обозначим перепад потенциальной завихренности частиц внутри и вне вихревого ядра как  $\sigma = \sigma_{in} - \sigma_{out}$ .

Математически распределение потенциальной завихренности в пространстве можно записать как

$$\Delta \psi = \begin{cases} \sigma_{in}, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ \sigma_{out}, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}. \quad (5)$$

Время  $t$  входит в (5) параметрически и описывает деформацию  $V$ .

Гидрофизическая трактовка (5) следующая. Океанический вихрь состоит из вихревого ядра повышенной завихренности и захваченной в движение окружающей жидкости. Вихревое ядро – это и есть вышеуказанный объем  $V$ , переносящий вращающиеся водные массы, оказавшиеся внутри ядра. Внешняя к ядру жидкость, участвующая в циркуляционном движении вокруг ядра, омывает ядро и имеет другую по сравнению с ядром завихренность, но является составной частью вихревого образования. Поведение вихревого ядра во многом определяет эволюцию всего вихря.

В силу линейности (5) задачу можно разбить на две условно самостоятельные компоненты: фоновое течение  $\psi_f$ , для которого справедливо уравнение во всем пространстве

$$\Delta \psi_f = \sigma_{out}, \quad (6)$$

и возмущение вихрем фонового течения  $\psi_v$  со следующим распределением потенциальной завихренности:

$$\Delta\psi_v = \begin{cases} \sigma, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0, & \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases}. \quad (7)$$

Как отмечалось ранее,  $\sigma$  — превышение потенциальной завихренности вихревого ядра  $\sigma_{in}$  над его фоновым значением  $\sigma_{out}$ . Фоновое течение  $\psi_f$  мы будем подбирать согласно уравнению (6), а задачу о вихревом возмущении (7) следует решать отдельно.

Соотношение (7) полностью совпадает с задачей определения гравитационного потенциала однородного по плотности тела. При этом допускается деформация объема  $V$ . Решение задачи (7) может быть приведено в общем виде для любой конфигурации объема  $V$ . Нас будет интересовать ситуация, когда форма объема  $V$  — эллипсоид с главными направлениями  $(x_1, y_1, z_1)$  и значениями соответствующих полуосей  $(a, b, c)$ . Решение такой задачи представлено ниже:

$$\begin{aligned} \psi_v(x_1, y_1, z_1, t) = & \\ = -\frac{1}{4}\sigma abc \int_{\lambda}^{\infty} & \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \mu} - \frac{y_1^2}{b^2 + \mu} - \frac{z_1^2}{c^2 + \mu}\right) \times & (8) \\ \times \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}}. & \end{aligned}$$

Здесь время  $t$  входит в (8) как параметр, означающее, что полуоси  $(a, b, c)$ , а также направления главных осей могут зависеть от времени как от параметра. Нижний предел в интеграле (8)  $\lambda > 0$  является положительным корнем кубического уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_1^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (9)$$

Поверхность  $\lambda = \text{const}$  соответствует софокусному эллипсоиду к исходному рассматриваемому эллипсоиду. Для внешних точек  $(x_1, y_1, z_1)$  очевидно  $\lambda > 0$ . Если же точка  $(x_1, y_1, z_1)$  попала внутрь эллипса с полуосами  $(a, b, c)$ , то для внутренних областей в (8) следует положить  $\lambda = 0$ .

Из теории гравитационного потенциала [9] следуют свойства: функция  $\psi$ , и ее первые пространственные производные непрерывны. В нашем случае это эквивалентно заявлению, что поле давления и поле геострофических скоростей непрерывны. Это свойство останется справедливым при любой деформации объема  $V$  и произвольной зависимости полуосей от времени.

В свою очередь непрерывность давления означает, что для решения (8) на границе ядра заведомо выполнено динамическое условие равенства давления по обе стороны от границы вихревого ядра. Кинематическое же условие на этой же границе еще не выполнено.

Если обозначить уравнение границы вихревого ядра как  $F(x, y, \tilde{z}, t) = 0$  в неподвижной системе координат с горизонтальными осями  $(x, y)$ , то точное кинематическое условие на этой границе выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

При этом последний член уравнения (10) мал по сравнению с аналогичными слагаемыми гори-

зонтального переноса  $O\left(\frac{w \frac{\partial F}{\partial z}}{u \frac{\partial F}{\partial x}}\right) \sim R_O$ . Поэтому,

если потребовать одинаковой для (10) точности с основным уравнением (1), то кинематическое граничное условие (10) следует упростить:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — горизонтальные геострофические скорости течения, индуцированные вихрем плюс внешние (фоновые) геострофические течения, являющиеся решением задачи (6). В качестве фоновых течений в данном подходе следует брать только равнозавихренные течения, потому что такие течения оставляют форму ядра в виде эллипсоидов во время его деформации. В частности, в качестве претендента на такое фоновое течение рассмотрим горизонтальное течение с вертикальным сдвигом

$$\vec{u} = (\Gamma z, 0, 0), \quad (12)$$

Отметим, что решение (6) для эллипсоидальной формы ядра записано в другой системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ , где в общем случае оси повернуты относительно неподвижной системы координат  $(x, y, \tilde{z})$ .

Пренебрежение вертикальной компонентой скорости в граничном условии (11) приводит к некоторым важным свойствам. Первое, вихревое ядро во время своей эволюции зажато между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, касаясь их верхней и нижней точками. Эти точки скользят по указанным поверхностям, не позволяя ядру подняться выше или опуститься ниже слоя расположения ядра. Жидкое вихревое

ядро “переливается” и “ворочается” внутри заданного слоя. Второе, площадь сечения ядра любой горизонтальной плоскостью сохраняется во время трансформации ядра. Эти свойства отмечались в работах [6, 19].

Уравнение эллипсоидальной поверхности вихревого ядра наиболее просто записывается в сопутствующей системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ :

$$F(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0. \quad (13)$$

Форма ядра зависит от времени  $t$  параметрически через переменные во времени полуоси  $a, b, \tilde{c}$  и ориентацию осей координат  $(x_1, y_1, z_1)$ . Отметим, что из-за своих больших горизонтальных размеров по сравнению с вертикальным размером вихревого ядра в реальных условиях океана две полуоси будут располагаться почти горизонтально. Обозначим их  $a$  и  $b$ . В этом случае третья полуось  $\tilde{c}$  будет почти вертикальной. Далее указанные полуоси  $a$  и  $b$  будем называть условно горизонтальными, а полуось  $\tilde{c}$  – условно вертикальной. Плоскость  $(x_1 O y_1)$ , образованная полуосами  $a$  и  $b$ , должна быть слегка наклонена к горизонтальной плоскости. Условие слабых уклонов может нарушаться для вихрей малых горизонтальных размеров, что может наблюдаться в морях Северного Ледовитого океана, где внутренний радиус деформации Россби весьма мал (порядка 5 км) и, соответственно, могут быть малы и горизонтальные размеры мезомасштабных вихрей. На математической стороне дела указанное свойство не скажется, поэтому и в случае заметных отклонений плоскости  $(x_1 O y_1)$  от горизонтали мы по-прежнему полуоси  $a$  и  $b$  будем называть условно горизонтальными. Сечение ядра плоскостью  $(x_1 O y_1)$  назовем главным сечением вихревого ядра.

Указанное соотношение (8) является точным решением нелинейного уравнения (1) с нелинейными граничными условиями (11), что делает это решение привлекательным для использования его в качестве удобного ориентира при решении аналогичных проблем, в частности, при численном исследовании морских движений в условиях, близких к квазигеострофическому равновесию сил, исследования точности разностных схем и т.д.

Задача о поведении эллипсоидального вихря в горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом (12) частично освещена в работах [6, 19]. Однако в этих публикациях не ставилась цель определить все режимы поведения вихрей в бароклинных течениях с вертикальным сдви-

гом (12). Тем не менее, в указанных работах выведены дифференциальные уравнения, описывающие поведение во времени длин полуосей вихревого эллипсоида и трех углов его ориентации в пространстве. Ниже мы будем следовать этим работам.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ВИХРЯ В ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

Для исследования эволюции вихря удобно работать с его безразмерными геометрическими параметрами. В качестве таковых рассмотрим два безразмерных числа. Первое число – отношение условных горизонтальных полуосей ядра вихря  $\epsilon = \frac{a}{b}$ . Параметр  $\epsilon$  описывает деформацию ядра вихря в плоскости  $(x_1 O y_1)$ . По аналогии с работой [5] назовем  $\epsilon$  параметром вытянутости (почти горизонтального удлинения) вихря. Другой безразмерный параметр  $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$  представляет собой

величину относительной сплюснутости вихря в направлении полуоси  $\tilde{c}$  и описывает его относительную толщину по оси  $z_1$ .

Для описания ориентации вихря в пространстве будем использовать углы Эйлера  $\varphi, \Theta, \psi$ . На рисунке 1 представлена серия последовательных поворотов ядра на углы Эйлера.

Для получения текущей ориентации ядра из начального положения (система  $X, Y, Z$ ) производится серия из трех поворотов: 1) поворот вокруг оси  $Z$  на угол  $\varphi$ , при этом оси  $X$  и  $Y$  переходят в оси  $X'$  и  $Y'$ ; 2) поворот вокруг оси  $Y'$  на угол  $\Theta$ , при этом оси  $X'$  и  $Z$  переходят в оси  $X''$  и  $Z''$ ; 3) поворот вокруг оси  $Z''$  на угол  $\psi$ , при этом оси  $X''$  и  $Y'$  переходят в оси  $X'''$  и  $Y'''$ . Таким образом, три размерных параметра  $a, b, \tilde{c}$  и три безразмерных параметра  $\varphi, \Theta, \psi$  полностью определяют геометрию вихревого ядра. Отметим, что вихрь как целое движется со скоростью фонового течения, приходящегося на центр вихря. Поскольку нас будет интересовать только эволюция границы вихревого ядра, а не его движение как целого, поместим центр вихря в точку  $(0,0,0)$ , где скорость фонового потока равна нулю. В результате такой вихрь как целое будет стоять на месте, но его граница может деформироваться, полуоси и углы ориентации могут меняться.

Приведенное ранее решение (8) вместе с фоновым течением (12) удовлетворяют уравнению (1). На границе ядра, представляющей собой скачок потенциальной завихренности, автоматически

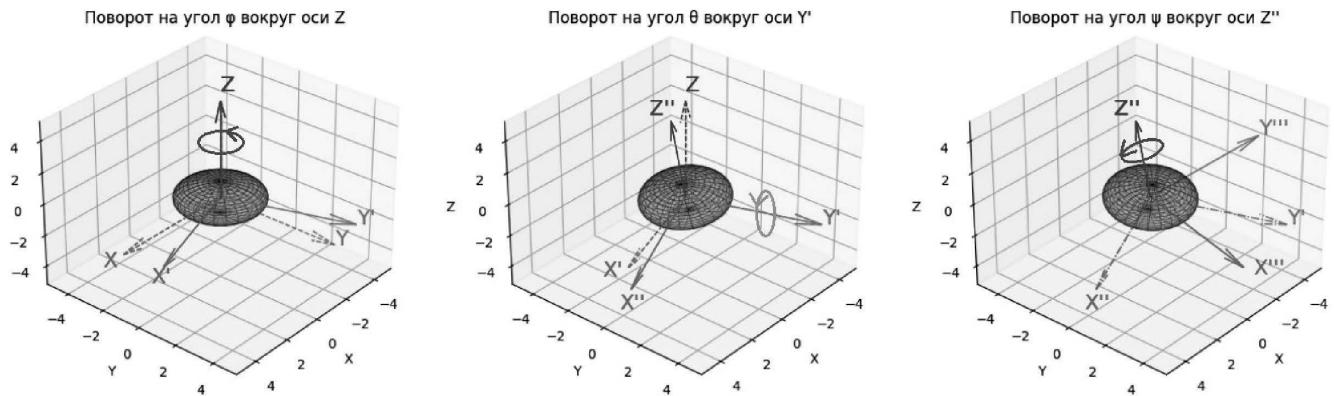


Рис. 1. Последовательные повороты ядра на углы Эйлера.

выполнено условие непрерывности давления (динамическое условие). Но кинематическое условие (11) для указанного решения еще не выполнено. Это условие позволит описать эволюцию геометрических параметров ядра вихря.

Для определения поведения вихря в фоновом потоке рассмотрим уже отмеченное кинематическое условие (11). Его можно записать в следующем виде [6, 19, 2]:

$$\nabla F \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = 0, \quad (14)$$

где  $\vec{V}$  – скорость движения границы ядра,  $\vec{U}$  – скорость движения жидкой частицы, которая состоит из скорости индуцированного вихрем течения и скорости внешнего потока. Условие (14) удобно представить в связанной с эллипсоидом системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ . При этом в уравнении (14) вертикальная компонента скорости в неподвижной системе  $(x, y, z)$  не должна, согласно (11), учитываться.

Подробно использование кинематического граничного условия (14) для получения уравнений эволюции характеристик вихря  $a(t), b(t), \tilde{c}(t), \phi(t), \Theta(t), \psi(t)$  изложено в работах [6, 19] и повторено в монографии [2]. Поэтому в данной статье мы кратко изложим идею вывода уравнений поведения указанных характеристик вихря, а для де-

тального ознакомления отошлем читателя к первоисточникам [6, 19] или [2]. Далее для простоты величину полуоси  $\tilde{c}(t)$  обозначим как  $c(t)$ .

Условие (14) также можно написать в матричном виде:

$$\vec{x}_1^\top F(G + T - J - D)\vec{x}_1 = 0, \quad (15)$$

где  $F$  определяется из уравнения поверхности эллипсоида (13) как

$$F = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $(G + T - J - D)\vec{x}_1$  представляет проекции скоростей на оси сопутствующей системы координат  $(x_1, y_1, z_1)$ . Рассмотрим по отдельности каждую из данных матриц. Матрица  $G = R^{-1}SRP$  описывает скорость частицы жидкости, генерируемой вихрем, полученную с использованием геострофического соотношения в (2), где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R \text{ – матрица поворота на углы}$$

Эйлера:

$$R = \begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \psi \cos \theta + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$P$  – диагональная матрица, состоящая из старших коэффициентов выражения (8) при  $\lambda = 0$ :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

где  $\alpha_0 = \int_0^\infty \frac{\phi(S)dS}{a^2 + s}$ ,  $\beta_0 = \int_0^\infty \frac{\phi(S)dS}{b^2 + s}$ ,  $\gamma_0 = \int_0^\infty \frac{\phi(S)dS}{c^2 + S}$ ,

$$\Phi(s) = \frac{abc}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}}.$$

Матрица  $J$  описывает скорость на поверхности ядра, вызванную вращением эллипсоида (ядра) как целого:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta & \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta & 0 & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Матрица  $T$  описывает внешний поток с вертикальным сдвигом  $\Gamma$  и задается как

$$T = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R. \quad (19)$$

После матричного вычисления имеем

$$\begin{aligned} A = F(G + T - J - D) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ a_{11} &= \frac{\Gamma a (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \sin \theta \cos \psi - \dot{a}}{a^3} \\ a_{12} &= \frac{-\beta_0 \cos \theta + \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \Gamma \cdot (\sin \psi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \sin \psi \cos \theta}{a^2} \\ a_{13} &= \frac{\gamma_0 \sin \varphi \sin \theta - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi - \Gamma (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta)}{a^2} \\ a_{21} &= \frac{\alpha \cdot \cos \theta - \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} + \Gamma \cdot (\sin \psi \cos \psi + \sin \psi \cos \psi \cos \theta) \sin \theta \cos \psi}{b^2} \\ a_{22} &= \frac{-b \Gamma \cdot (\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \sin \psi \sin \theta - b}{b^3} \\ a_{23} &= \frac{\gamma_0 \sin \theta \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi - \Gamma \cdot (\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \cos \theta}{b^2} \\ a_{31} &= \frac{-\alpha_0 \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi - \Gamma \cdot \sin \theta \cos \varphi \cos \psi}{c^2} \\ a_{32} &= \frac{-\beta_0 \sin \theta \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi + \Gamma \cdot \sin \psi \sin^2 \theta \cos \varphi}{c^2} \\ a_{33} &= \frac{\frac{1}{4} \Gamma \cdot c \cdot (-\sin(\varphi - 2\theta) + \sin(\psi + 2\theta)) - \dot{c}}{c^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для выполнения кинематического условия (15) матрица  $A$  должна быть антисимметричной, то есть

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{12} = -a_{21}, \\ a_{13} &= -a_{31}, \quad a_{23} = -a_{32}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя выражения элементов матрицы  $A$  (21) в условие (22) и с учетом того, что  $\varepsilon = \frac{a}{b}$ ,  $K = \frac{c}{\sqrt{ab}}$ ,

И наконец, матрица  $D$  описывает деформацию границы эллипсоидального ядра:

$$D = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & 0 & 0 \\ 0 & \dot{b}/b & 0 \\ 0 & 0 & \dot{c}/c \end{pmatrix}. \quad (20)$$

получаем интересующую нас систему из пяти дифференциальных уравнений, которая полностью описывает динамику поведения вихря во внешнем бароклинном потоке:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -\tau \sin \theta [\sin 2\psi \cdot \sin \varphi - \cos \theta \cos 2\psi \cos \varphi] \cdot \varepsilon \\ \dot{K} &= \frac{3}{4} \tau \sin 2\theta \cos \varphi K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2)\cos 2\psi + \tau \left( \frac{K^2}{\sin \theta} \right) \left[ \cos \theta \left( \frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \sin \varphi - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta \sin 2\psi \cos \varphi \right] \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1) \sin \theta \sin 2\psi + \tau \left( \sin^2 \theta - K^2 \cos 2\theta \left( \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \right) \cos \varphi + \frac{K^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos \theta \sin 2\psi \sin \varphi \\
\dot{\psi} &= \cos \theta \left[ \Omega_3 - \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) \cos 2\psi \right] - \\
&- \frac{\tau}{\sin \theta} \cdot \left[ \left[ K^2 \cos^2 \theta \left( \frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) - \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \psi - \varepsilon^2 \sin^2 \psi}{1 - \varepsilon^2} \right] \sin \varphi - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{K^2}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{K^2}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta + \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \sin^2 \theta \right] \cos \theta \sin 2\psi \cos \varphi \right], \quad (23)
\end{aligned}$$

где  $\tau = \Gamma/\sigma$  безразмерный параметр сдвига;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  – безразмерные угловые скорости вращения эллипсоида (ядра вихря) вокруг трех полуосей. Они задаются следующим образом [6, 2, 19]:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)(\varepsilon^{-1} + s)^3 (K^2 + s)^3}} \\
\Omega_2 &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)^3 (\varepsilon^{-1} + s)(K^2 + s)^3}} \\
\Omega_3 &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)^3 (\varepsilon^{-1} + s)^3 (K^2 + s)}}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Производные в (23) вычислены по безразмерному времени  $\sigma t$  и обозначены точкой над соответствующим символом:

$$\dot{\vec{f}} = \frac{d\vec{f}}{d(\sigma t)}, \quad (25)$$

где  $\vec{f} = (\varepsilon(t), K(t), \phi(t), \Theta(t), \psi(t))^T$  – вектор-столбец (вектор состояния) левой части (14), который полностью описывает динамическое состояние вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом. В уравнениях (23) автоматически учтено условие сохранения объема вихревого ядра.

Система (23)–(24) записана в безразмерном виде, что позволяет высказать некоторые общие свойства. В (23) входит только один внешний параметр задачи – относительный сдвиг скорости  $\tau = \Gamma/\sigma$ . Остальные параметры – геометрические:

удлинение вихря  $\varepsilon = \frac{a}{b}$ , его сплюснутость  $K = \frac{c}{\sqrt{ab}}$  и три угла ориентации, меняющиеся во времени.

Поэтому поведение вихря зависит от  $\tau$  как от параметра, от начальных условий на  $\varepsilon(0)$ ,  $K(0)$  и начальных значений трех углов ориентации. Подобие поведения вихрей в данном случае требует равенства всех шести соответствующих параметров. Поэтому подобные вихри будут вести себя одинаково – независимо от реальных физических размеров и завихренности ядра. Неважны также интегральные характеристики вихрей. Правда, следует учитывать, что геострофическое приближение должно быть справедливым в любом случае.

Предварительное численное исследование показало, что среди геометрических характеристик важной начальной геометрической характеристикой вихря является наклон плоскости главного сечения к горизонтальной плоскости. Поэтому среди начальных углов ориентации особое внимание следует уделять углу  $\theta$ , остальные углы будут играть второстепенную роль. Это свойство учитывалось нами. Наконец, интересным является тот факт, что замена в системе (23)  $\Gamma$  и  $\sigma$  на  $-\Gamma$  и  $-\sigma$  поворачивает безразмерное время в обратную сторону, но система (23) не изменится. Поэтому, если развитие вихря происходит по какому-то типу, то у вихря с противоположным знаком завихренности и противоположным сдвигом развитие будет осуществляться в обратном по времени направлении. Другими словами, если возможно растяжение вихря в нить, то для других вихрей возможен и обратный процесс – “стягивание” нити в компактный вихрь.

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Для системы уравнений (23) отсутствует какое-либо математическое представление, позволяющее систему заметно упростить. Поэтому

единственным способом изучения (23) является численный метод. Для численного решения (14) была написана соответствующая программа на языке MATLAB с использованием функции ode23, которая представляет собой численное решение системы (14) методом Рунге-Кутта второго и третьего порядков с аддитивным шагом по времени. Метод Рунге-Кутта, реализованный в ode23, одновременно вычисляет приближенные решения второго и третьего порядков точности на текущем шаге. Разница между этими решениями используется как оценка локальной погрешности. MATLAB проверяет, не превышает ли локальная погрешность заданный пользователем или стандартный допуск. Этот допуск задается через параметры RelTol (относительная ошибка) или AbsTol (абсолютная ошибка). Если локальная ошибка слишком велика (больше допуска), шаг времени уменьшается, чтобы повысить точность на следующем шаге. Если ошибка мала (значительно меньше допуска), шаг времени увеличивается, чтобы ускорить вычисления. При реализации численного решения (написании кода) был выбран параметр относительной погрешности  $\text{RelTol} = 10^{-6}$ . При решении системы (23) также необходимо указать правую часть (14) и начальные значения (условия) вектора состояния  $\vec{f}(t) = (\varepsilon(t), K(t), \phi(t), \Theta(t), \psi(t))^T$ . Задача является многомерной и не поддается аналитическим упрощениям, поэтому для описания эволюции вихря в потоке необходимо многократно численно решать эту систему (23), перебирая начальные условия и параметры задачи. После чего требуется анализировать результаты счета. Первичный анализ результатов был также автоматизирован. Окончательные же выводы делались человеком.

Нами были выбраны следующие начальные условия:

$$\begin{aligned}\varepsilon(0) &\in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}, \quad K(0) \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}, \\ \Theta(0) &\in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}, \quad \phi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Эволюция ядра вихря сильно зависит от начального угла  $\Theta$  и слабо от начальных углов  $\phi$  и  $\psi$ , поэтому в сериях расчета последние два угла изначально равны нулю. Также задается параметр сдвига  $\tau$  от  $-0.5$  до  $0.5$  с шагом  $0.01$ . Параметр  $K$  для реальных условий океана мал, однако в условиях Северного Ледовитого океана  $K$  может достигать значений порядка единицы. Таким образом, в данной работе была проведена серия из  $5 \times 5 \times 7 \times 101 = 17675$  расчетов. Решение системы (14) для конкретных начальных условий (17)

представляет собой эволюцию вектора состояния  $\vec{f}(t)$  во времени. Совокупность решений для различных начальных условий (17) позволяет анализировать динамику поведения вихря во внешнем бароклинном потоке с вертикальным сдвигом.

## РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ ВИХРЯ В ПОТОКЕ

При изучении эволюции эллипсоидальных вихрей в бароклинном потоке наиболее важным для нас вопросом является вопрос о том, будет ли вихревое ядро оставаться локализованным по размерам образованием или же ядро сможет неограниченно вытягиваться в каком-либо направлении. В этом смысле разумно сравнить режимы эволюции эллипсоидального вихря под воздействием равнозавихренного баротропного потока с нашей задачей. Как известно, в баротропных потоках существуют три различных режима поведения вихрей [4, 3]: режим вращения ядра, режим нутационных колебаний ядра и режим неограниченного вытягивания вихря в горизонтальном направлении. В первых двух режимах вихревое ядро остается локализованным образованием (т.е. вихрь выживает в течении), хотя его размеры испытывают ограниченные периодические колебания. В последнем режиме течение уничтожает вихрь путем его неограниченного вытягивания.

В горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом поведение вихря становится более сложным. Прежде всего, со временем меняются все три угла ориентации и длины всех трех полуосей. Наиболее удобно такую эволюцию ядра наблюдать в виде проекции ядра на горизонтальную плоскость. В этом случае, если размеры проекции во времени изменяются ограниченно, то в таком течении вихрь будем считать выжившим, а сам режим назовем режимом выживания. Если же проекция вихря неограниченно вытягивается в горизонтальном направлении, то такой вихрь фоновым течением уничтожается. Соответствующий режим назовем режимом вытягивания (или уничтожения). Возможны и всякого рода промежуточные варианты, о которых речь пойдет ниже.

Расчеты изучения поведения вихрей в бароклинном фоновом течении показали следующее. В потоках с вертикальным сдвигом вихрь может иметь три режима поведения: 1) режим выживания; 2) режим вытягивания вихря (или режим уничтожения вихря течением); 3) режим конечного времени жизни вихря с последующим неограниченным вытягиванием.

В режиме выживания вихрь, оставаясь в ограниченных горизонтальных размерах, живет в фоновом течении сколь угодно долго. Такой вихрь сдерживает растягивающее воздействие фонового течения благодаря значительной потенциальной завихренности ядра. Напомним, что в нашем случае по вертикали ядро зажато между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, поэтому вертикальный размер вихря не меняется при всех режимах. Режим выживания осуществляется в двух вариантах – проекция ядра на горизонтальную плоскость вращается или колеблется вокруг вертикальной оси с одновременной ограниченной деформацией горизонтальных размеров. Режим всех изменений квазипериодический. В трехмерном пространстве вихревое ядро может вращаться или колебаться вокруг всех направлений. Однако условие того, что вихрь зажат между двумя горизонтальными плоскостями, приводит к тому, что основное движение формы вихря – это вращение или колебание ядра практически вокруг вертикальной оси. Вариации главных направлений вдоль условно горизонтальных осей приводят к некоторому покачиванию плоскости главного сечения ( $x_1Oy_1$ ).

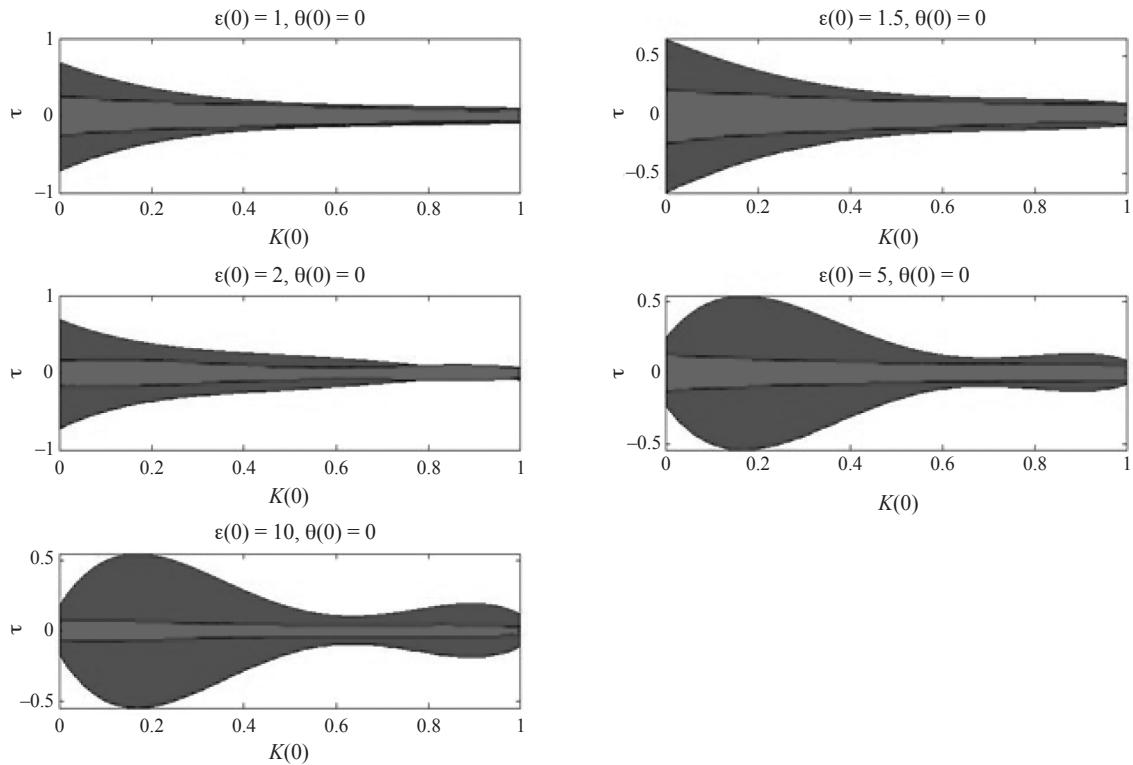
Режим неограниченного вытягивания проявляется для вихрей с относительно слабой завихренностью вихревого ядра. При этом вытягивание начинается сразу в начальный момент времени. Вихрь разворачивается, ориентируясь вдоль течения, и одновременно вытягивается. В нашей терминологии вытягивается одна из условно горизонтальных осей, например, большая ось  $a$ , с одновременным уменьшением условно вертикальной оси  $c$  до нулевого значения. Вторая условно горизонтальная ось  $b$  в этом режиме остается конечной величиной. Конечным результатом такого вытягивания является тонкое по вертикали, длинное вдоль течения и конечное поперек течения в горизонтальной плоскости вихревое образование. Собственно вихрем такое образование называть уже нельзя – все вихревые свойства такого образования по мере вытягивания затухают. Скорее всего, такое образование похоже на элемент тонкой вертикальной структуры океана.

Новым режимом поведения вихря в бароклинном потоке является режим, при котором на начальном этапе вихрь развивается, как будто находится в режиме выживания, т.е. некоторое время он остается в виде локализованного вихревого образования – его форма ограниченно деформируется, вращается или колеблется, а затем вращение прекращается, вихрь ориентируется вдоль

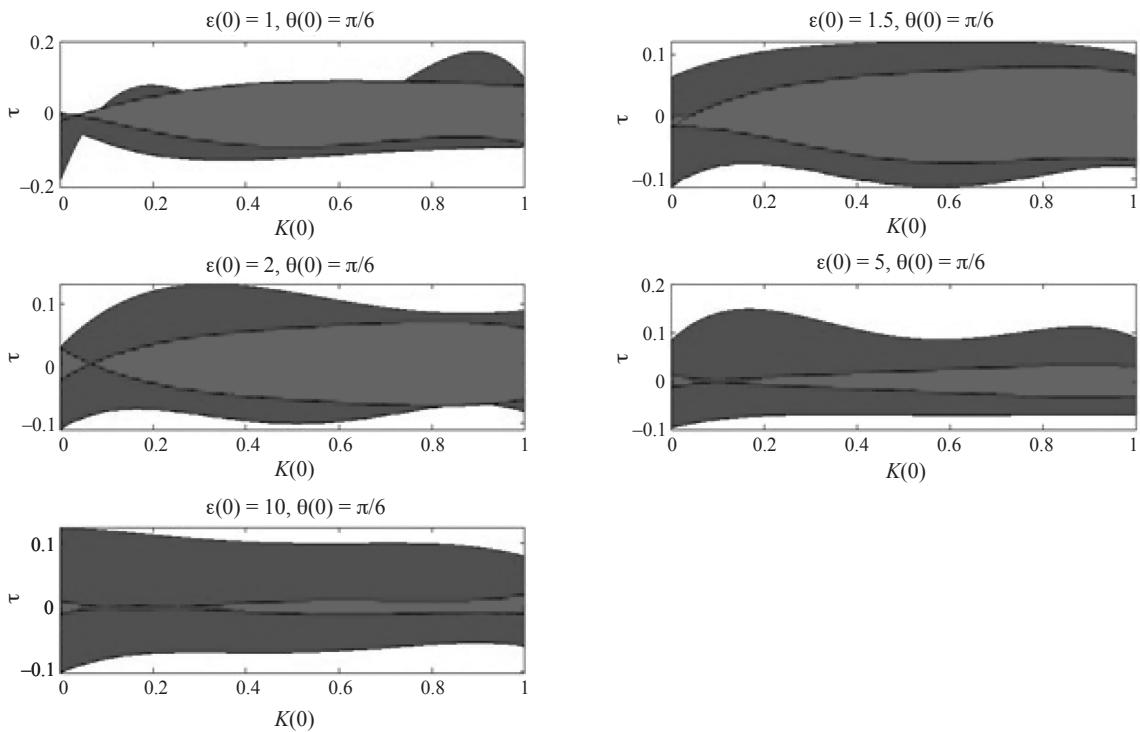
текущего и далее неограниченно вытягивается вдоль фонового потока. Начало вытягивания – это начало конца жизни вихревого образования как вихря. В этом режиме время жизни вихря ограниченное. Такой режим назовем режимом конечного времени жизни. Справедливости ради отметим, что впервые этот режим был описан в работе [6]. Однако в этой же работе существование остальных режимов отмечено не было.

Численный эксперимент проводился следующим образом. Выбирались безразмерный параметр сдвига  $\tau = \Gamma/\sigma$  и начальные условия задачи  $\varepsilon(0)$ ,  $K(0)$ ,  $\phi(0)$ ,  $\Theta(0)$ ,  $\psi(0)$ . Далее на интервале безразмерного времени в  $10^4$  единиц (что соответствует по порядку величины физическому времени от нескольких до 10 лет) проводился расчет всех параметром задачи согласно системе (23). Результат анализировался по типу поведения параметров  $\varepsilon(t)$ ,  $K(t)$ . Далее расчет повторялся для других  $\tau$ ,  $\varepsilon(0)$ ,  $K(0)$ ,  $\phi(0)$ ,  $\Theta(0)$ ,  $\psi(0)$ . Диапазон изменений безразмерного параметра сдвига  $\tau = \Gamma/\sigma$  был привязан к отрезку  $(-0.5; 0.5)$ . Именно этому диапазону приблизительно соответствовали границы изучаемых режимов. Как уже отмечалось, поведение ядра вихря сильно зависит от начального угла  $\Theta(0)$  и слабо от начальных углов  $\phi(0)$  и  $\psi(0)$ , поэтому в сериях расчета последние два угла изначально равны нулю; в дальнейшем зависимость типов решений от этих углов не анализировалась. В результате набор основных параметров задачи, от которых зависели типы решений, – следующие:  $\tau$ ,  $\varepsilon(0)$ ,  $K(0)$ ,  $\Theta(0)$ . В этом наборе  $\tau$  – параметр безразмерного сдвига фонового течения, не меняющийся в процессе эволюции конкретного вихря. Это важный внешний параметр задачи. Второй важный безразмерный параметр, описывающий геометрические свойства вихревого ядра, это начальный параметр сплюснутости вихря  $K(0)$ , совпадающий с числом Бургера. Режимы поведения вихрей удобно изображать на плоскости  $(K(0), \tau)$  при фиксированных начальных условиях на оставшиеся параметры  $\varepsilon(0)$ ,  $\Theta(0)$ .

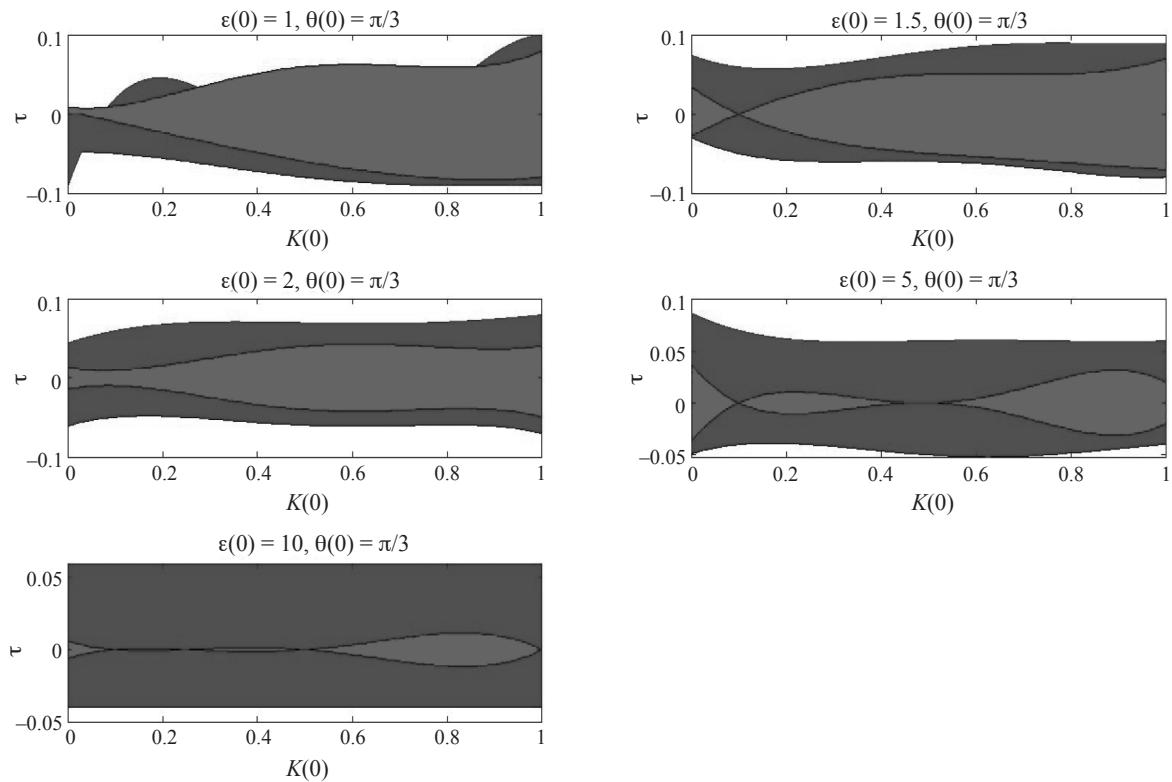
На рисунках 2–8 представлены режимы поведения ядра вихря на плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  при различных начальных условиях  $\varepsilon(0)$  и  $\Theta(0)$ . Здесь красным цветом обозначена зона выживания вихря в фоновом потоке, синим цветом – зона конечного времени жизни и белым цветом – зона неограниченного вытягивания вихря фоновым течением. Зона неограниченного вытягивания начинается на границе синей зоны и уходит в плюс и минус бесконечность по оси  $\tau$ .



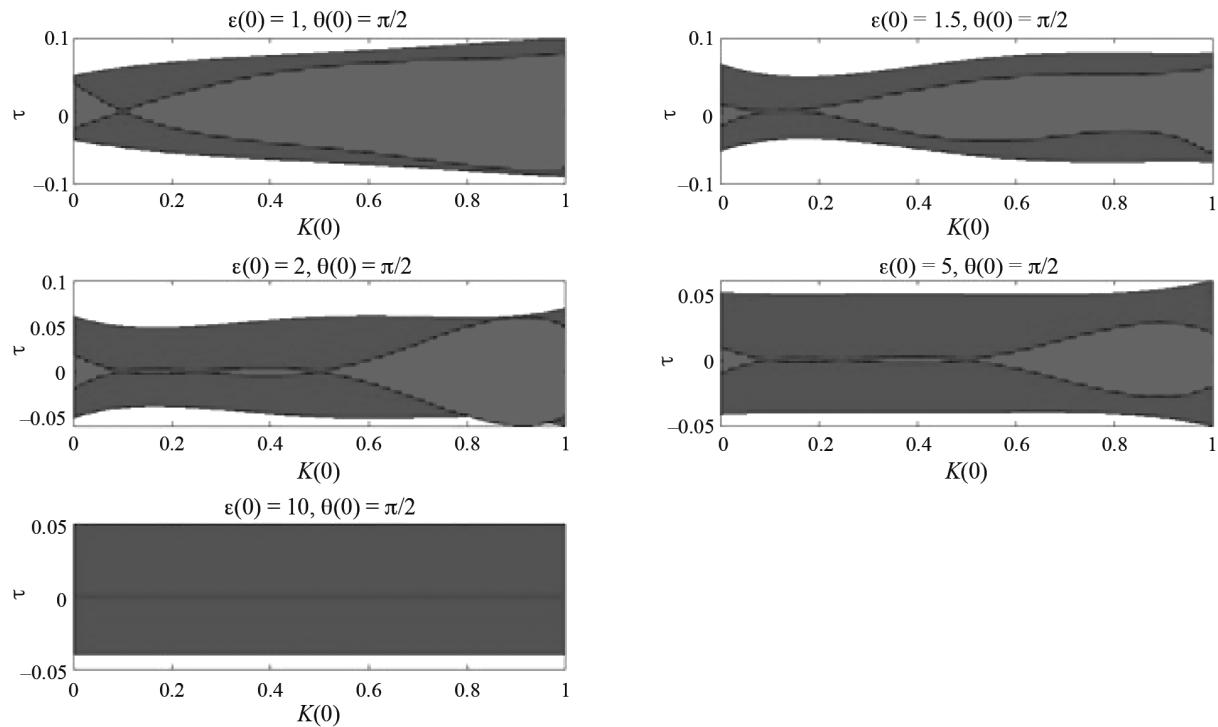
**Рис. 2.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\epsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0)=0$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона неограниченного вытягивания. Для удобства выше самой картинки на каждом чертеже показаны начальные значения параметров  $\epsilon(0)$  и  $\Theta(0)$ .



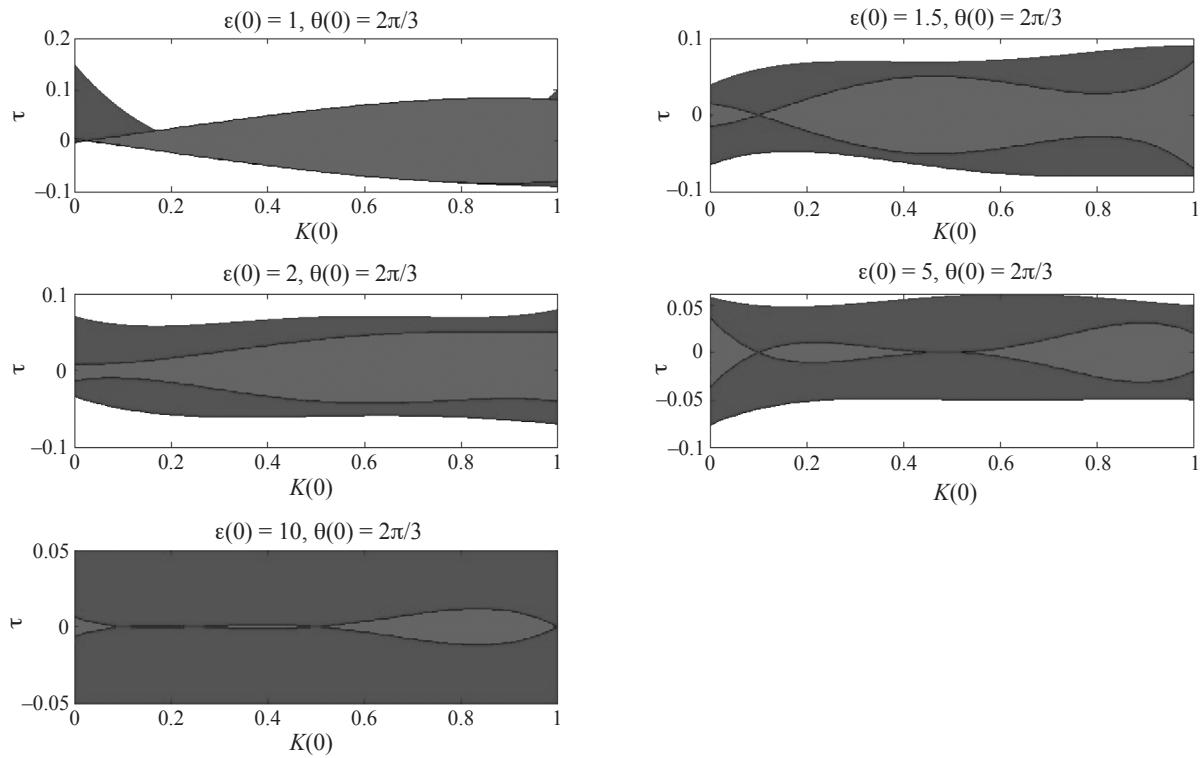
**Рис. 3.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\epsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \frac{\pi}{6}$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.



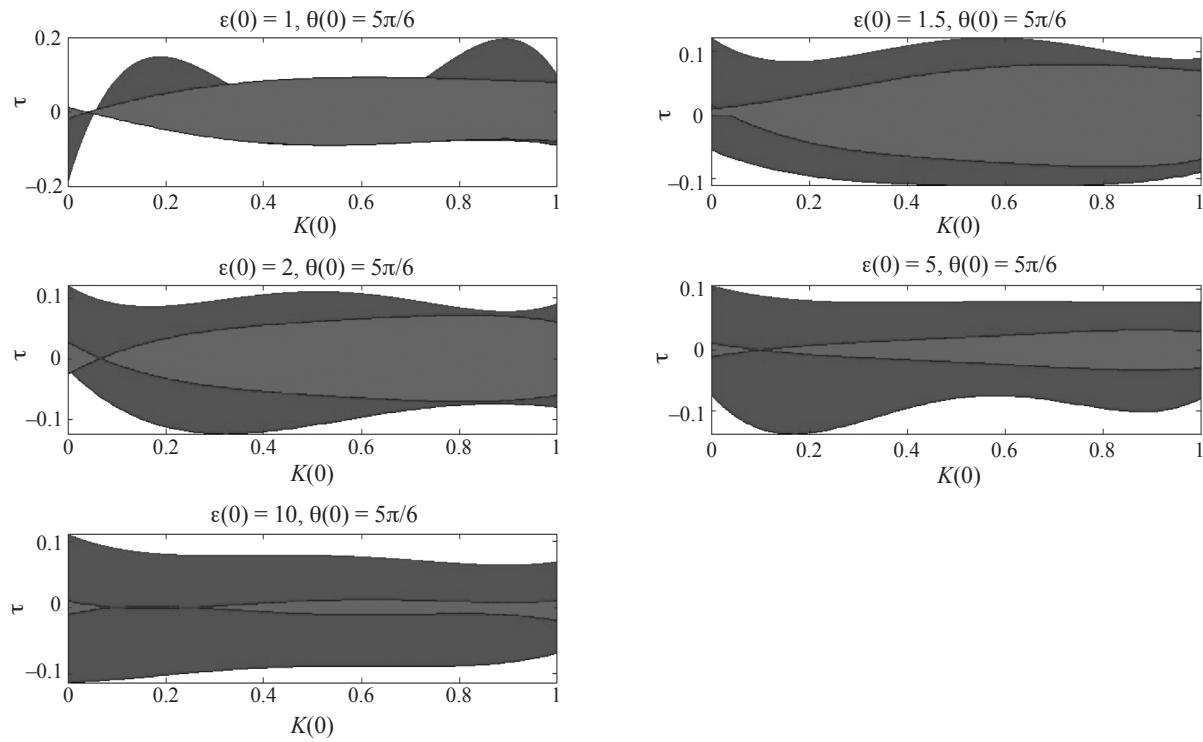
**Рис. 4.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \frac{\pi}{3}$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.



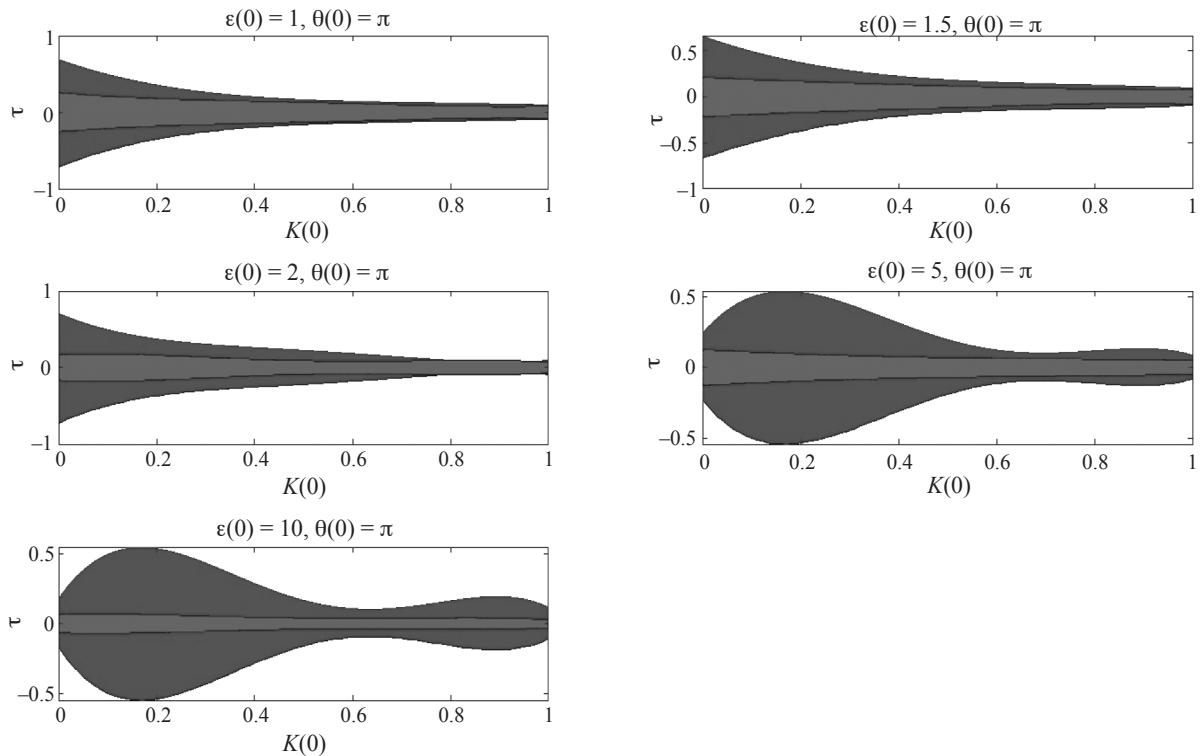
**Рис. 5.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \frac{\pi}{2}$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.



**Рис. 6.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\epsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \frac{2\pi}{3}$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.



**Рис. 7.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau$  ( $K(0), \tau$ ) для начальных значений  $\epsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \frac{5\pi}{6}$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.



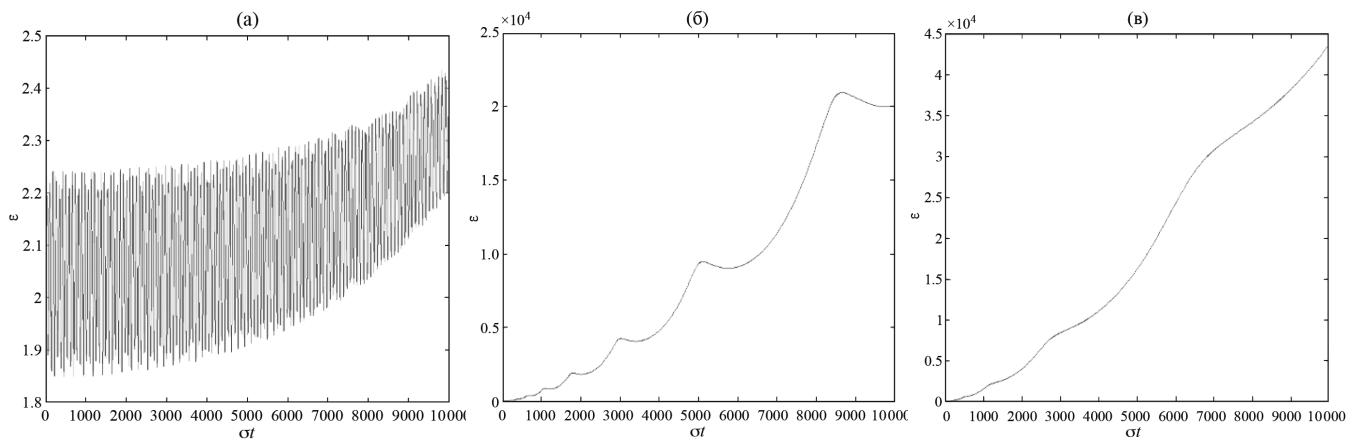
**Рис. 8.** Области режимов поведения ядра вихря в плоскости начального параметра сплюснутости  $K(0)$  и параметра сдвига  $\tau(K(0), \tau)$  для начальных значений  $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$  и  $\Theta(0) = \pi$ . Красная зона – зона выживания, синяя – зона конечного времени жизни, белая – зона вытягивания.

Поведение вихря сильно отличается при переходе от красной зоны в синюю. На рисунках 9–11 представлена эволюция параметров вихря в трех зонах.

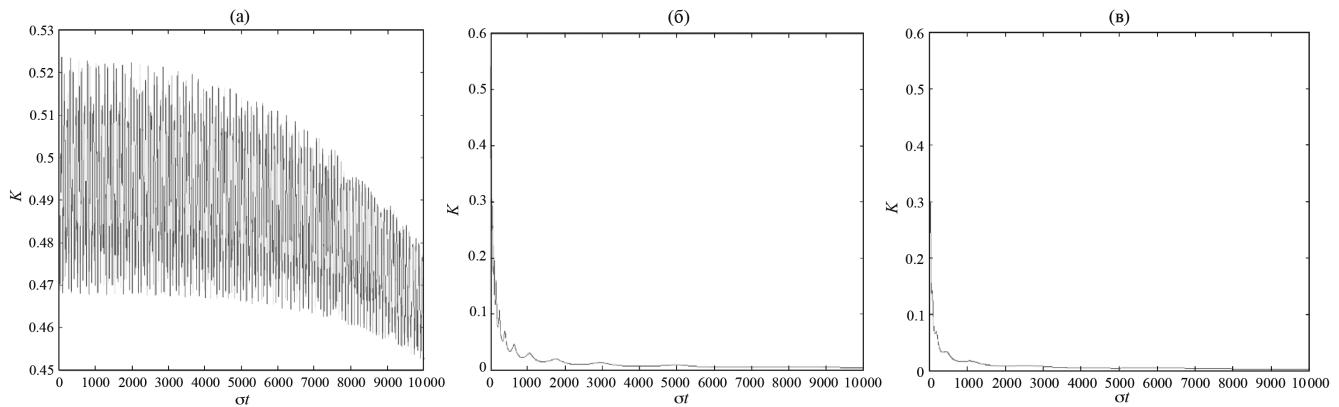
Как видим, в красной зоне вихрь сохраняет свою относительную форму бесконечно большое время ( $\sigma t = 10000$ ). В двух остальных зонах за это же время вихрь вытягивается при виде сбоку в нить и, следовательно, уничтожается за счет эффектов вязкости и диффузии, которые в нашем подходе не учитываются.

На рисунках 12–14 представлена визуализация ядра вихря единичного объема в неподвижной системе координат для трех зон в разные моменты безразмерного времени  $\sigma t$ .

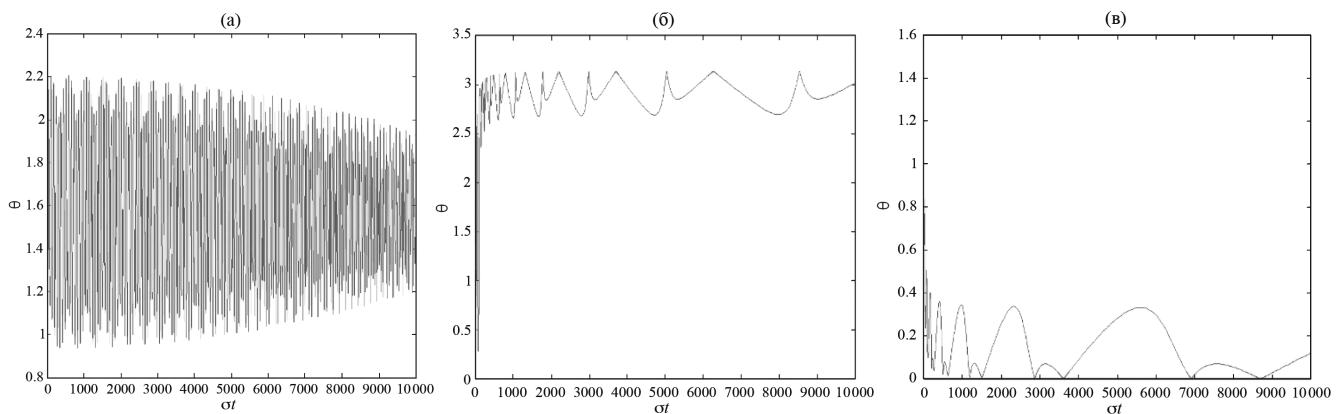
Из визуализации видно, что в разных зонах эволюция ядра сильно отличается. В красной зоне ядро преимущественно сохраняет форму. В синей зоне вихрь, начиная с некоторого момента времени, неограниченно вытягивается по горизонтали вдоль течения, оставаясь в конечных горизонтальных размерах поперек течения



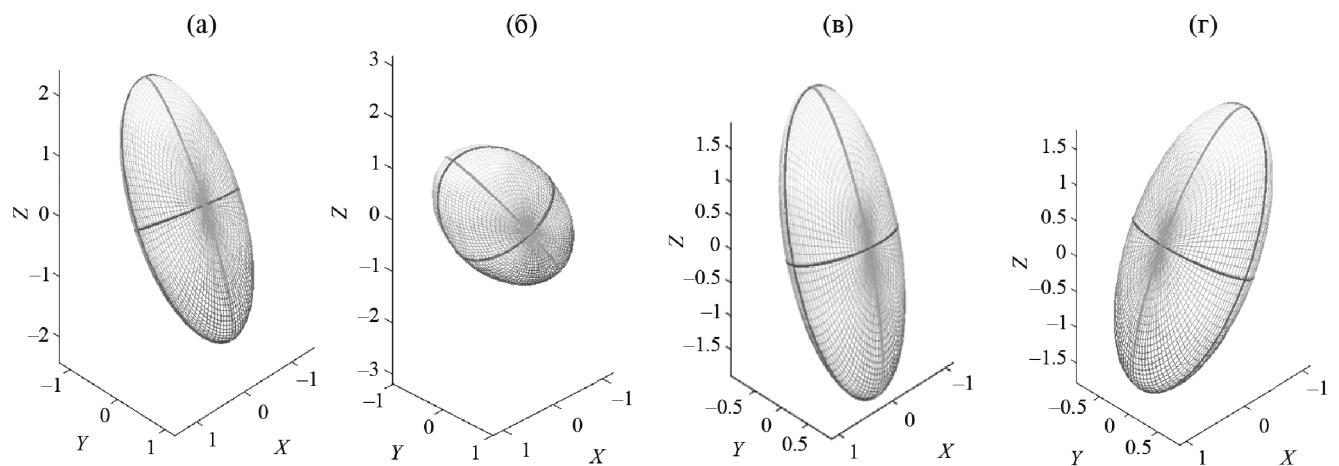
**Рис. 9.** Эволюция параметра удлинения вихря  $\varepsilon$  по безразмерному времени  $\sigma t$  в красной (a), синей (b) и белой (c) зонах при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$  и параметрах сдвига  $\tau = -0.01$  (a),  $\tau = 0.06$  (b),  $\tau = 0.1$  (c).



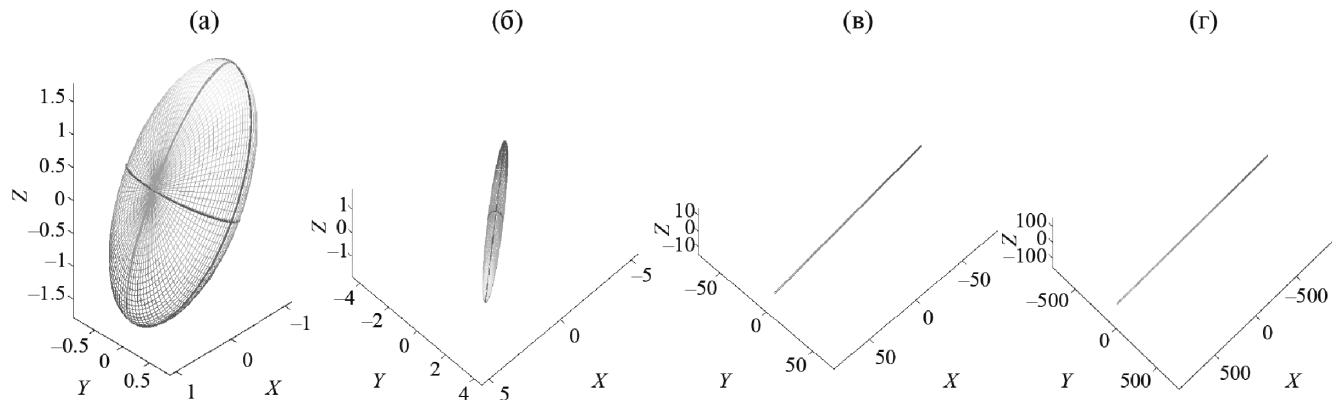
**Рис. 10.** Эволюция параметра вытянутости вихря  $K$  по безразмерному времени  $\sigma t$  в красной (а), синей (б) и белой (в) зонах при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$  и параметрах сдвига  $\tau = -0.01$  (а),  $\tau = 0.06$  (б),  $\tau = 0.1$  (в).



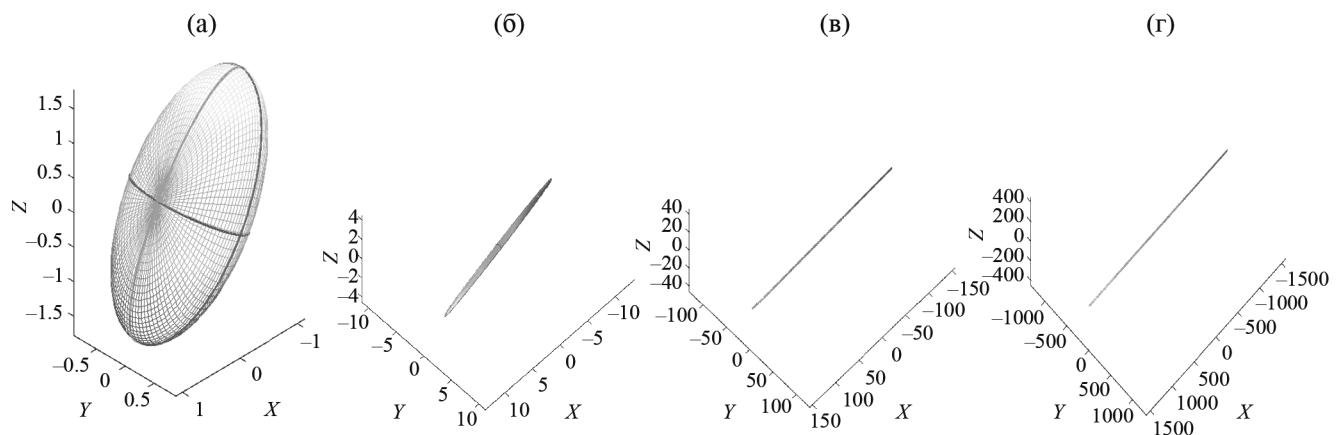
**Рис. 11.** Эволюция угла нутации вихря  $\theta$  по безразмерному времени  $\sigma t$  в красной (а), синей (б) и белой (в) зонах при начальных параметрах  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$  и параметрах сдвига  $\tau = -0.01$  (а),  $\tau = 0.06$  (б),  $\tau = 0.1$  (в).



**Рис. 12.** Ориентация и форма ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\tau = -0.01$  в красной зоне в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).



**Рис. 13.** Ориентация и форма ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\tau = 0.06$  в синей зоне в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).



**Рис. 14.** Ориентация и форма ядра вихря в трехмерном пространстве  $XYZ$  для начальных значений  $\varepsilon(0) = 2$ ,  $K(0) = 0.5$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\tau = 0.1$  в белой зоне в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 100$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г).

и неограниченно уменьшаясь по вертикали. В белой зоне вытягивание начинается сразу же. Особый интерес представляет возможное вращение ядра в проекции в горизонтальной плоскости.

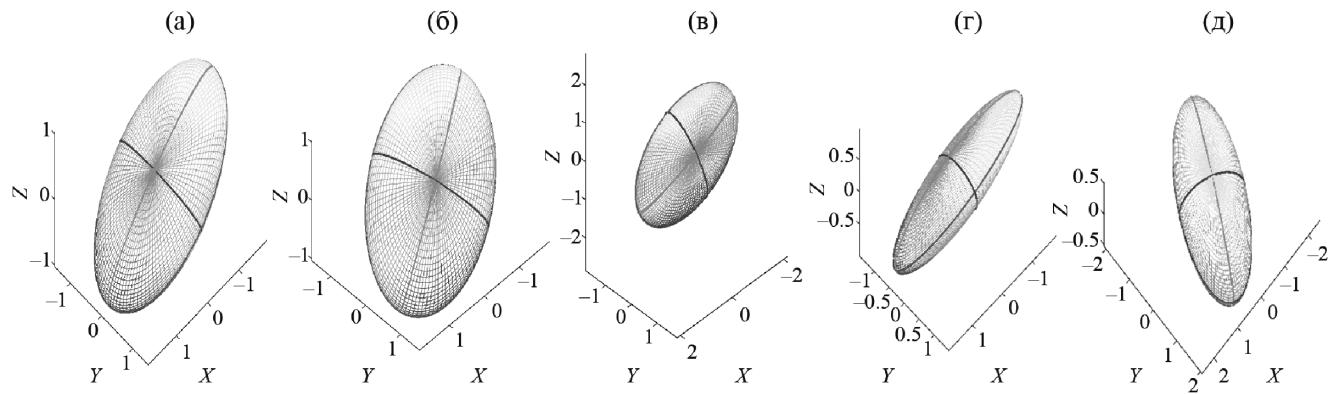
Рассмотрим эволюцию ядра в красной зоне при начальных значениях параметров  $\varepsilon(0) = 1.5$ ,  $K(0) = 0.25$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\tau = -0.06$ . При этих начальных данных вихрь интенсивно вращается, преимущественно сохраняя относительную геометрическую форму. На рисунке 15 представлено ядро вихря в пространстве в разные моменты времени.

Пожалуй, самым интригующим вопросом по статье является вопрос про то, в каких условиях вихрь выживает в вышерассмотренном фоновом течении. Из рисунков 2–8 можно оценочно определить диапазон значений безразмерного параметра сдвига течения  $\tau = \Gamma/\sigma$ , соответствующего красной зоне для разных начальных условий на параметры вихря. Из физических соображений понятно, что красной зоне соответствуют малые

значения  $\tau$  – сильные вихри выживают в течениях со слабым сдвигом. Максимально большой возможный диапазон для параметра  $\tau$  красной зоны, взятый из наших расчетов, приведен ниже:

$$-0.25 < \tau < 0.25 \quad (27).$$

и показан на рисунке 2 с начальными условиями  $\varepsilon(0) = 1.0$  и  $\theta(0) = 0$ . Условие (27) можно считать достаточным условием выживания вихрей в сдвиговом потоке (12). Это условие означает, что для выживания вихрей потенциальная завихренность их вихревого ядра  $\sigma$  (интенсивность вихря) как минимум в четыре раза должна превышать сдвиг фонового течения  $\Gamma$ . Для других начальных условий на  $\varepsilon(0)$  и  $\theta(0)$  превышение интенсивности вихря  $\sigma$  над  $\Gamma$  должно быть еще больше. Интерпретация рисунков 2–8 совместно с необходимым условием выживания вихрей (27) позволяют сделать вывод о том, что в течениях со сдвигом (12) выживают только сильные вихри с потенциальной завихренностью  $|\sigma|$ , заметно превышающей сдвиг



**Рис. 15.** Ориентация ядра вихря в пространстве для начальных значений  $\varepsilon(0) = 1.5$ ,  $K(0) = 0.25$ ,  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\tau = -0.06$  в красной зоне в моменты времени  $\sigma t = 0$  (а),  $\sigma t = 10$  (б),  $\sigma t = 1000$  (в),  $\sigma t = 10000$  (г),  $\sigma t = 100000$  (д).

фоновой скорости  $|\Gamma|$ . Условие (27) дает следующую оценку выживания:

$$|\sigma| > 4|\Gamma|. \quad (28)$$

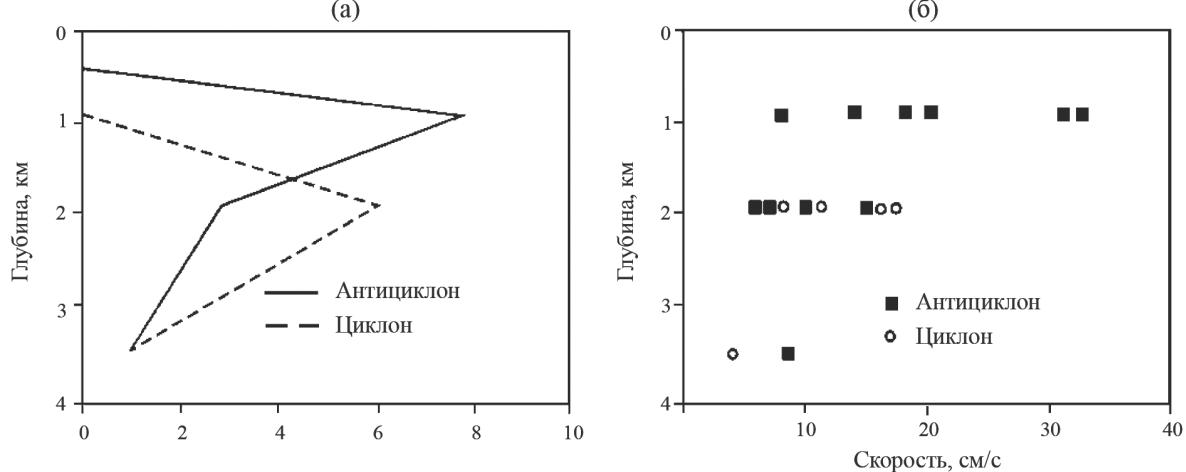
Следует отметить, эта оценка получена для специальных начальных условий. Для других начальных условий неравенство усугубляется и означает, для выживания вихря в течении требуется еще больший перепад отношения  $|\sigma|/|\Gamma|$ , чем указывает неравенство (28).

Воспользуемся соотношениями (27) и (28), чтобы теперь оценить минимальный сдвиг скорости  $|\Gamma|$ , необходимый для возможности неограниченно вытянуть вихрь с завихренностью ядра  $\sigma$ . Интенсивность геострофического вия оценим как  $|\sigma| = (1 \div 3) \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ . Напомним, что для условий геострофичности требуется ма-

лость числа Россби  $\text{Ro} = \left| \frac{\text{rot}_z \vec{u}}{f} \right| \sim \left| \frac{\sigma}{f} \right| \ll 1$ , поэтому  $|\sigma| = (1 \div 3) \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$  соответствует интенсивности

реального геострофического вихря. Согласно (27), граница между красной и синей зонами оценивается по параметру сдвига как  $|\Gamma| = 0.25 \cdot |\sigma| = 0.25 \cdot (1 \div 3) \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} = (0.25 \div 0.75) \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} \sim 0.5 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ , что соответствует перепаду скорости  $0.5 \frac{\text{см}}{\text{с}}$  на 1 км по вертикали. Это очень посредственный вертикальный сдвиг скорости.

Согласно приведенным оценкам, практически все вихри должны уничтожаться такими течениями, включая спокойные зоны крупномасштабной циркуляции океанов. Однако в реальности вихри существуют на значительной акватории Мирового океана. Следует отметить, что приведенный пример идеализирует сильное воздействие сдвигового потока на мезомасштабные вихри, поскольку в нашей модели океан по вертикали вместе с фоновым течением считался безграничным. Конечность вертикальных размеров фонового течения несомненно уменьшает эффект воздействия течения на вихрь. Однако качественный



**Рис. 16.** Распределение количества мезомасштабных вихрей по глубине в районе Гольфстрима [11] (а) и максимальные скорости движения частиц в этих вихрях (б).

вывод, что течение с заметным вертикальным сдвигом сильно влияет на выживаемость вихрей в таких течениях, остается справедливым. Кроме того, становится ясным, что вертикальный сдвиг более активно воздействует на вихри, чем горизонтальный сдвиг. Это свойство полностью согласуется со свойством, что бароклинная неустойчивость течений играет более значительную роль в мезомасштабной динамике океана, чем баротропная неустойчивость. Также следует ожидать, что течение с сильным вертикальным сдвигом растягивает вихри в горизонтальном направлении, превращая ядра вихрей в элементы тонкой вертикальной структуры.

В качестве подтверждения этого тезиса приведем работу [11], где изучалось распределение количества вихрей по глубине в районе Гольфстрима (см. рис. 16, заимствованный из этой работы).

Как следует из рисунка 16, мезомасштабные и субмезомасштабные вихри полностью отсутствуют в слое от поверхности до глубины 1 км, где оценки сдвига течения наибольшие. По нашему мнению, в этом слое вихри должны неограниченно растягиваться и впоследствии уничтожаться фоновым течением. На глубинах от 1 до 3 км, где сдвиг течения заметно меньше, количество вихрей резко возрастает, что говорит о том, что здесь вихри сопротивляются растягивающему воздействию фонового течения и более успешно выживают в этих условиях.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ИНТЕРПРЕТАЦИЙ И ПРОБЛЕМ

1. В работе продемонстрированы три варианта поведения вихрей в бароклинном сдвиговом потоке: режим выживания с неограниченным временем жизни, режим неограниченного вытягивания вихря (или, по-другому, режим уничтожения вихря течением) и, наконец, режим конечного времени жизни вихря. Последний режим интересен тем, что некоторое время эволюция вихря в течении похожа на режим выживания, но затем вихрь останавливается, начинает вытягиваться и переходит в режим уничтожения. Режим конечного времени жизни вихрей впервые был освещен в работе [6]. Два других режима в ней найдены не были. В [6] также было предложено соотношение, связывающее безразмерное время жизни вихря  $\sigma T$  с безразмерной интенсивностью вихря  $\sigma/\Gamma$  в виде степенного закона  $\sigma T \sim (\sigma/\Gamma)^n$ . Попытка связать подобным соотношением время жизни вихря с его интенсивностью в нашей задаче для более широкого диапазона  $\sigma/\Gamma$  и дру-

гих начальных условий не привела к успеху, что свидетельствует о более сложных связях в системе вихрь – течение.

2. Интересно сравнить поведение вихря в баротропном и бароклинном равнозавихренных потоках. Наиболее полно задача о вихре в баротропном течении рассматривалась в работе [3], где было отмечено три типа поведения вихря, два из которых можно объединить в один режим, напоминающий режим выживания вихря в бароклинном течении, а оставшийся один – это режим неограниченного вытягивания вихря течением. Таким образом, в бароклинном течении наблюдается более богатый набор режимов. Здесь присутствует режим конечного времени жизни вихря, который отсутствует в случае воздействия на вихрь баротропных фоновых потоков. Картины неограниченного вытягивания вихрей в указанных двух типах течений тоже отличаются. В обоих случаях вытягивание происходит по горизонтали. Однако для баротропных течений в перпендикулярном направлению вытягивания горизонтальном направлении размер вытянутого вихревого образования уменьшается формально до нуля, в то время как в вертикальном размер остается конечным. Вихрь трансформируется в фигуру, похожую на горизонтально натянутую ленту, у которой плоскость ленты расположена вертикально. При виде сверху такое образование похоже на вихревую нить или филамент. Подобные структуры наблюдаются в океане [4], правда, они искривляются фоновыми течениями и, как правило, не являются прямолинейными отрезками. В изучаемом в настоящей работе бароклинном течении вихри вытягиваются по-другому. В горизонтальном направлении течения происходит неограниченное увеличение размера вихря. В перпендикулярном течению горизонтальном направлении (в плоскости течения) вихрь остается в конечных размерах. В вертикальном разрезе размер ядра уменьшается формально до нуля. Таким образом, конечным результатом такой трансформации является вихревое образование в виде горизонтально растянутой ленты. В отличие от баротропного течения, плоскость ленты горизонтальная. При виде сверху такое образование также похоже на ленту. Геофизическая интерпретация такого преобразования может трактоваться как превращение вихря в тонкую вертикальную структуру океана.

3. Соотношение (27) совместно с рисунками 2–8 указывают на то, что сильный сдвиг фоновой скорости вытягивает вихри, слабый сдвиг оставляет их в виде компактных вихревых

образований. Это же соотношение дает возможность оценить предельный сдвиг, при котором происходит смена режимов. Как показали расчеты, предельный сдвиг соответствует весьма незначительной величине параметра сдвига  $\Gamma$ , а, следовательно, из теории практически всегда следует ожидать растяжения вихрей. Однако в природных условиях это не так. Сильные вихри во множестве благополучно выживают. Поэтому полученное критическое значение для сдвига, следующее из нашей теории, завышено. В чем причина? Дело в том, что мы для математической простоты океан и течение представляли безграничными. Следуя гравитационной аналогии, после давления в системе вихрь — течение математически аналогично гравитационному потенциалу в системе звезда — межзвездная пыль. Здесь роль вихревого образования играет звезда, а роль фонового течения — межзвездная пыль. Плотность пыли эквивалентна потенциальной завихренности фонового течения, плотность звезды эквивалентна потенциальной завихренности вихря. Математически эти задачи совпадают. Правда, следует учесть, что движение в обоих случаях будет отличным. Очевидно, что если ограничить объем межзвездной пыли, то гравитационное воздействие пыли на звезду уменьшится, равно как и ограничение размеров течения приведет к аналогичным результатам в задаче о поведении вихря в фоновом течении. Ограничение вертикальных размеров фонового течения уменьшит воздействие течения на вихрь. Таким образом, в неравенстве (27) следует уменьшить величину диапазона параметра интенсивности сдвига  $\tau = \Gamma/\sigma$  фонового течения, что, в свою очередь, уменьшит оценку величины критического сдвига скорости, отделяющего зоны выживания и уничтожения вихрей в течении. Отсюда возникает дополнительная проблема — как в нашей задаче учесть ограниченность вертикальных размеров течения и к каким результатам для критического значения сдвига фоновой скорости это приведет. Это — дело будущего.

4. Из факта существования режима неограниченного вытягивания вихря можно заключить, что математически возможен и обратный процесс — “стягивание” вытянутой вихревой структуры в компактный вихрь. Действительно, замена  $\sigma$  и  $\Gamma$  на  $-\sigma$  и  $-\Gamma$  оставит уравнения (23) неизменными с единственным отличием — течение времени пойдет в другую сторону. Поэтому следует ожидать, что при тех же начальных условиях процесс эволюции нового вихря в новом течении будет развиваться в обратном направлении. Сле-

довательно, явлению неограниченного вытягивания вихрей в одних случаях сопутствует явление “стягивания” вытянутых вихревых образований в компактные вихри в других случаях. Возникает вопрос — действительно ли это так и где такое явление можно обнаружить в природе. Пока мы знаем о единичных случаях подобного поведения, в то время как существование вихревых нитей на спутниковых снимках — явление обычное.

5. Известно, что длинные вихри неустойчивы. Они распадаются на серию более мелких вихрей. Математические исследования подобного толка проводились в отсутствие фоновых течений для плоского случая вихрей Кирхгофа [8] и для объемных эллипсоидальных вихрей в присутствии фоновых течений [17]. Работы по изучению устойчивости вихрей к распаду на более мелкие вихри в присутствии неоднородных фоновых течений проводились недостаточно, а для бароклинных течений вообще не проводились. Возможно, эти работы не привлекли внимание ученых. Тем не менее, в природе во множестве существуют вихревые филаменты (что равносильно длинным вихрям), не распадающиеся на более мелкие вихри. Отсюда можно сделать вывод о том, что в данном случае фоновые течения стабилизируют длинные вихри, не позволяя им распасться. Пока полной ясности в этом вопросе нет. Но сама проблема о влиянии неоднородных фоновых течений на распад длинных вихрей на более мелкие вихри остается.

## ВЫВОДЫ

В работе решена задача поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом для большого количества параметров задачи и начальных условий.

Установлено, что эволюция ядра вихря зависит только от его начальных геометрических параметров, начальных углов ориентации и, что наиболее важно, от параметра относительного сдвига фонового течения (отношения сдвига фонового течения к потенциальной завихренности ядра). Никакие интегральные характеристики вихря (например, интегральная завихренность ядра, а также его линейные размеры) не влияют на поведение вихря. Подобные вихри будут вести себя одинаково — и большие по размерам, и маленькие. В условия подобия вихря входит один внешний безразмерный параметр задачи (относительный сдвиг фоновой скорости) и пять геометрических безразмерных параметров — параметры удлинения, сплюснутости и три угла ориентации.

В результате исследования поведения вихрей в сдвиговом потоке были получены три варианта поведения вихря на плоскости параметров начальной сплюснутости вихревого ядра  $K(0)$  и параметра безразмерного сдвига фонового потока  $t$ : 1) зона выживания с бесконечным временем жизни; 2) зона конечного времени жизни; 3) зона вытягивания (или уничтожения вихря течением). Установлено, что в зоне выживания вихрь сохраняет конечность размеров вихревого ядра, находясь в колебательно-вращательном режиме неограниченное время. Так ведут себя интенсивные вихри в потоке со слабым сдвигом. В зоне конечного времени жизни вихрь вначале ведет себя аналогично поведению в зоне выживания, затем ориентируется в определенном направлении и далее монотонно вытягивается течением. Эта зона соответствует конечному времени жизни вихря. Однако физическое время жизни вихря меняется в широком диапазоне и может быть как коротким, так и достаточно продолжительным. Так ведут себя вихри промежуточной интенсивности. В зоне вытягивания неограниченное удлинение начинается с начального момента времени, что соответствует уничтожению вихря течением с самого начала эволюции вихря во внешнем интенсивном потоке. Такое поведение свойственно слабым вихрям в потоке с сильным сдвигом.

Только интенсивные вихри со значительной потенциальной завихренностью ядра могут противостоять растягивающему воздействию течения на вихрь. Течение с сильным сдвигом растягивает вихри в горизонтальном направлении, превращая ядра вихрей в элементы тонкой вертикальной структуры. Теоретически возможен и обратный процесс – собирание из длинной по горизонтали и тонкой вертикальной структуры вихревого образования с конечным горизонтальным размером.

**Финансирование работы.** Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Института океанологии РАН им. П. П. Ширшова FMWE-2024-0016 (теоретическая часть работы и анализ результатов) и гранта РНФ № 25-17-00021 (численное моделирование).

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елкин Д.Н., Зацепин А.Г., Шварцман Д.Р. Предварительные результаты лабораторных исследований эволюции нефронтальных вихрей в двухслойной вращающейся жидкости // Океанологические исследования. 2023. Т. 51. № 1. С. 5–35.
2. Жмур В.В. Мезомасштабные вихри в океане. М.: ГЕОС, 2011. 290 с.
3. Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суэтин Б.П. Условия трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. 2023. Т. 63. № 2. С. 200–210. doi: 10.31857/S0030157423020144
4. Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суэтин Б.П. Приложение к реальному океану теории трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. 2023. Т. 63. № 2. С. 211–223. <https://doi.org/10.31857/S0030157423020156>
5. Жмур В.В., Панкратов К.К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
6. Жмур В.В., Щепеткин А.Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f-плоскости // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27. № 5. С. 492–503.
7. Зацепин А.Г., Кондрашов А.А., Корж А.О. и др. Субмезомасштабные вихри на кавказском шельфе Черного моря и порождающие их механизмы // Океанология. 2011. Т. 51. № 4. С. 592–605.
8. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 5-е изд. 736 с.
10. Чаплыгин С.А. Собрание сочинений. Т. 2. М: Гостехиздат, 1948. 643 с.
11. Bane J.M., O'Keefe L.M., Watts D.R. Mesoscale eddies and submesoscale coherent vortices: their existence near and interaction with the Gulf Stream // Mesoscale/Synoptic Coherent Structures In Geophysical Turbulence. Elsevier Oceanography Series, 50. Elsevier. Amsterdam – Oxford – N.Y. – Tokio, 1989. P. 501–518.
12. Chaplygin S.A. On a pulsating cylindrical vortex // Trans. Phys. Sect. Imperial Moscow Soc. Friends of Natural Sciences. 1989. V. 10. № 1. P. 13–22.
13. Dritschel D.G., Reinaud J.N., McKiver W.J. The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model // Journal of Fluid Mechanics. 2004. V. 505. P. 201–223.
14. Kida S. Motion of an elliptic vortex in uniform shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1981. 50(10). P. 3517–3520.
15. Kirchhoff G. Vorlesungen über matematische Physik: Mechanik. Teubner, Leipzig. 1876. 466 p.
16. McKiver W.J., Dritschel D.G. (2003) The motion of a fluid ellipsoid in a general linear background flow // Journal of Fluid Mechanics. 2003. V. 474. P. 147–173. <https://doi.org/10.1017/S0022112002002859>

17. McKiver W.J., Dritschel D.G. The stability of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex in a background shear flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 560. P. 1–17.
18. McKiver W.J., Dritschel G.G. Balanced solutions for an ellipsoidal vortex in a rotating stratified flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. V. 802. P. 333–358.  
<https://doi.org/10.1017/jfm.2016.462>.
19. Meacham S.P., Pankratov K.K., Shchepetkin A.F., Zhmur V.V. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1994. V. 21. № 2–3. P. 167–212.  
[https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6)
20. Polvani L.M., Flierl G.R. Generalized Kirchhoff vortices // *Phys. Fluids*. 1986. V. 29. P. 2376–2379.  
<https://doi.org/10.1063/1.865530>
21. Zhmur V.V., Pankratov K.K. Dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. V. 3. № 5. P. 1464–1464.  
<https://doi.org/10.1063/1.857998>

## BEHAVIOR MODES OF A QUASI-GEOSTROPHIC ELLIPSOIDAL VORTEX IN A HORIZONTAL FLOW WITH VERTICAL SHEAR

D. A. Harutyunyan<sup>1,\*</sup>, V. V. Zhmur<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)

<sup>2</sup> Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences

\* e-mail: arutyunyan.da@phystech.su

The paper addresses the problem of the behaviour modes of baroclinic geostrophic vortices with ellipsoidal-shaped cores in horizontal flows with a vertical shift. In such flows, the vortex core is confined between two stationary horizontal planes, which the vortex touches at its upper and lower points. Under the influence of the background flow, the lengths of all the axes of the ellipsoid can change, and the angles of orientation of the vortex in space also change. The authors identify three modes of vortex behaviour. The first mode is the survival mode of the vortex in a shear flow, where the vortex undergoes finite oscillations of the semi-axes for an indefinite period of time and may exhibit complex behaviour in terms of its orientation angles. This mode corresponds to strong vortices. In the second mode, the vortex is stretched along the flow from the very beginning, remaining with finite horizontal dimensions perpendicular to the flow and compressed vertically. This is the destruction mode of the vortex by the flow, where the final result is the formation of a thin vertical structure of the ocean from the vortex. Weak vortices undergo this type of evolution. This mode is referred to as the “unlimited stretching mode.” Finally, there is a third mode, called the “finite lifetime mode,” in which, for a finite period of time, the vortex behaves similarly to the survival mode (its shape is finitely deformed, and the vortex rotates or oscillates in space), but eventually, the vortex stretches indefinitely in a manner similar to the destruction mode. The authors have delineated the regions of existence for each mode on a dimensionless parameter plane of the problem and determined the boundaries separating the above-mentioned modes of vortex behaviour.

**Keywords:** ellipsoidal vortex, vortex core, baroclinic flow, vertical shear, finite vortex lifetime mode, stretching mode